有理曲面を含む代数多様体の単有理性について

AUTHOR(S):
海老原, 円

代数幾何学シンポジウム記録
1990年度　pp.49-69

有理曲面を含む代数多様体の単有理性について

学習院大理　海老原 円 (Madoka Ebihara)

以下に述べることの詳細については、目下論文 [E] を準備中である。ここでは、厳密な論証よりも、主定理の証明に至る問題意識のありどころに重点をおきたい。やさしい内容なので、気楽にお読みいただければ幸いである。

§1. 問題と主定理と、いくつかの個人的なコメント

以下、多様体といえば、代数閉体 k 上定義された、非特異射影的代数多様体をさすことにする。

次の問題を考える。

問題　3次元多様体 X が有理曲面 S を含み、その normal bundle $N_{S/X}$ が ample であるとする。このとき、X は単有理的 (unirational) であるか?

これに対して、次の結果が得られた。

主定理　3次元多様体 X が、nonsingular projective toric surface S を含み、その normal bundle $N_{S/X}$ が ample ならば、X は unirational である。

多様体 X が unirational であるとは、射影空間 $\mathbb{P}^n$ からの、dominant rational map が存在することである。今さら説明の必要もあるまいが、代数多様体を大別する時、単有理的な多様体は、非常に特異なものであって、例えば一般型の多様体とは対極に位置している。しかし、特異な性質を持つことは、必ずしも、それが取るに足らぬものであることを意味しない。むしろ、特異性ゆえにその存在が普遍的たり得る、ということもあるような気がする。例えば、化学物質全体の中で、水（H_2O）が、その特異な性質ゆえに自然界において豊富な形態で存在し得ているように、$\mathbb{P}^n$ に近い性質を持つ多様体は、その特異性ゆえに存在の普遍性を獲得しているような気がしてならない。

さて、上述の問題は、いかにも正しそうである。その根拠（もちろん、主定理はその有力な根拠である）のうち、2つの点を列挙してみよう。

1). X を $\mathbb{P}^4$ 内の3次超曲面とし、それを超平面 H で切

て、$S = X \cap H$ とおくと、X 及び S は問題の条件を満足し、X は unirational である。よく知られているように、この X は rational ではない（[CG]）。つまり、3次元多様体 X の有理性をここで問題とするのは適切でないことになる。個人的な意見であるが、単有理性は、何らかの有限性の反映である。rational variety は、unirational なものの特別な場合であって、たまたま rational になったという感じがする。批判をおそれずに言えば、unirational と rational の関係は、ample と very ample の関係に似ているような気がする。ample divisor は、何倍かすると very ample になるものであって、その「何倍か」がたまたま1にとれるとき、very ample となる。$\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$ という支配的有理写像が存在する時、X は unirational であり、その φ の degree が 1、つまり birational にとれるとき、rational というわけである。（数十年後にもし、今の unirational variety が単に rational と呼ばれ、いまの rational variety が very rational と呼ばれることになっていたとすれば、それは筆者の個人的見解が正当であったことになる。そうすると、その時、rationally connected な多様体は、どんな扱いをうけているだろうか？）

2). L. Bădescu（[B1], [B2]）は、normal な variety X で、$\mathbb{P}^2$ あるいは $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$-bundle を ample divisor として含むものを分類した。それによれば、そのようなXはすべて rational、よって特に unirational である。これも冒頭の問題に部分的に答えている。それは次の事実による。

<u>事実</u>．（cf. [H]）．Xを complete variety とし、SをX上の effective Cartier divisor とする時、次は同値。

1)．$N_{S/X}$は ample．

2)．birational map $f: X \to X'$があって、fはSの近傍では同型であり、$f(S)$がX'の ample divisor となる。

§2．証明の方針

与えられた多様体が unirational であることをどうやって示すか？ 多くの場合、射影空間ないしそれと双有理同値な多様体からの dominant rational map を直接構成するよりほかに手がないようである。つまり、定義にもどって証明せざるを得ないわけで、それは理論の最も原初的な形態といえる。ここで紹介する手段は、F. Campana氏（[C]）や加藤昌英氏（[K]）の論文に触発されたもので、それは一言で言えば、

$$\boxed{\mathbb{P}^1 \text{ の近傍を見よ！}}$$

ということになる。もっとも、normal bundle が negative

であっては役に立たない。もう少しくわしく言えば、

$\boxed{\mathbb{P}^1\text{の形式的近傍で、normal bundle が positive なものを見よ！}}$

ということになる。unirational な多様体は、rational curve を豊富に含んでいる。木を見て森を知れ、というところだろうか？

ここで、1つ定義をする。

<u>定義</u>. 3次元 regular formal neighbourhood (X, C) of $C \cong \mathbb{P}^1$ が RD (rationally dominated) とは、

$$\varphi : (\mathbb{P}^3, \text{line})^\wedge \longrightarrow (X, C)$$

なる dominant morphism が存在すること。

ここで morphism とは ringed space としての morphism で、それが dominant とは、対応する1次近傍間の map が dominant であることを意味する。

次の定理が本質的である。

<u>定理</u> (広中－松村、[HM]). Yを $\mathbb{P}^N$ 内の closed connected subscheme とし、$\dim Y > 0$ とする。このとき、Yは $\mathbb{P}^N$ 内で、性質 (G3) を満たす。すなわち、Yのまわりで定義された formal-rational function が、$\mathbb{P}^N$上の有

理関数に一意的に延長される。

この系として、次が得られる。

<u>系.</u> X を3次元多様体とし、C をその上の有理曲線とする。C に沿っての formal completion $(X, C)^\wedge$ が RD ならば、X は unirational である。

これによって、

X の unirationality を示すには、その上にうまい rational curve C をみつけて、C の formal nbd. を考察すればよい

ということになる。このような curve C を、我々は reference curve と呼ぶことにしよう。

さて、我々は、次の定理を示すことによって主定理を証明する。

<u>定理.</u> S を任意の nonsingular projective toric surface とするとき、S 上に (reference) curve C が存在し、$C \cong \mathbb{P}^1$ かつ $(C^2)_S > 0$ であって、(X, S) を、$N_{S/X}$ が ample であるような S の任意の formal nbd. とするとき、X 内での C の近傍 $(X, C)^\wedge$ は RD である。

注意. (X, S) が algebrizable かどうか、つまりある3次元多様体内に実現されるかどうかは問題にしない。

この定理から主定理は直ちにしたがう。そうして、この定理を証明するために、

鍵となる考察① : まず $\mathbb{P}^1$ の近傍がいつ RD かという Lemma を用意しておいて、

考察② : toric surface の形式的近傍をうまく記述し、

考察③ : toric surface 上に うまく reference curve をみつけて、② の記述を利用して、その curve の近傍を記述し、それを ① で用意しておいた補題にかける、

というふうに考える。ここでは、① と ② に焦点をしぼって話を進めたい。いずれにせよ、formal nbd. についての議論が続くわけである。

§3. 鍵となる考察①

下は、$\mathbb{P}^1$ の近傍が RD になるための1つの十分条件を与えている。

補題. $(V, C) = \mathrm{Spec}\, k[t_0][[X_0, Y_0]] \cup \mathrm{Spec}\, k[t_1][[X_1, Y_1]]$ を、$C \cong \mathbb{P}^1$ の近傍とする。$N_{C/V}$ は positive とする。座標

(t_0, X_0, Y_0) と (t_1, X_1, Y_1) の間の transition が

$$\begin{cases} X_0 = \sum a_{\alpha ij}\, t_1^{-\alpha} X_1^i Y_1^j \\ Y_0 = \sum b_{\alpha ij}\, t_1^{-\alpha} X_1^i Y_1^j \\ t_0 = \sum c_{\alpha ij}\, t_1^{-\alpha} X_1^i Y_1^j \end{cases}$$

と書き表され，$\{X_0 = Y_0 = 0\} \cup \{X_1 = Y_1 = 0\} = C$ とする。
さらに、ある自然数 $r > 0$ があって，
「$a_{\alpha ij} \neq 0$, $b_{\alpha ij} \neq 0$ または $c_{\alpha ij} \neq 0$ ならば $\alpha \geqq \frac{i+j}{r}$」
を満たすとする。この時、(V, C) は RD である。

証明は中学生にも理解できる容易なものである。$(\mathbb{P}^3, line)^\wedge$ の座標を (u_i, z_i, w_i) $(i = 0, 1)$ で与え，$z_0 = u_1^{-1} z_1$，$w_0 = u_1^{-1} w_1$，$u_0 = u_1^{-1}$ としておく。この時，$t_1 \mapsto u_1^r$，$X_1 \mapsto z_1$，$Y_1 \mapsto w_1$ となるように morphism $\varphi : (\mathbb{P}^3, line)^\wedge \longrightarrow (V, C)$ を具体的に作ってみせればよいのである。

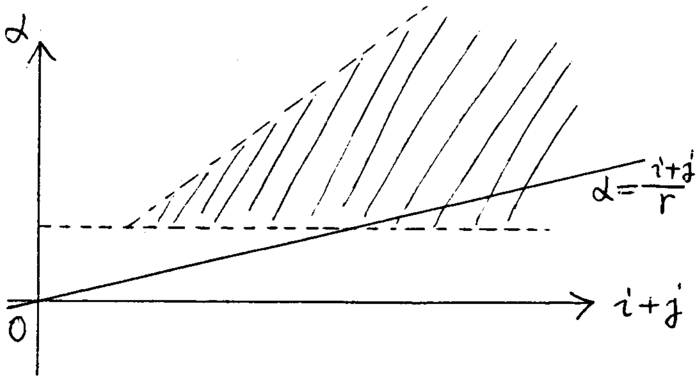
もちろん、これは十分条件であって、必要条件ではない。しかし、主定理の証明には、これで十分である。さらに言えば，$r = 1$ として十分なのである。

私は、この Lemma を、<u>RD 性が近傍の有限性、有界性の反映である</u>ことの示唆であると受け取りたい。話を簡単にするために、$C \simeq \mathbb{P}^1$ の近傍 (V, C) が，$\mathcal{O}_{V|C} \cong \mathcal{O}_C \oplus N_{C/V}$

$N_{C/V} \cong \mathcal{O}(p) \oplus \mathcal{O}(q)$, $(p>0,\ q>0)$ を満たすとすると、
そのような近傍の transition は、

$$\begin{cases} X_0 = t_1^{-p} X_1 + \displaystyle\sum_{p<\alpha<pi+qj} a_{\alpha ij}\, t_1^{-\alpha} X_1^{i} Y_1^{j} \\ Y_0 = t_1^{-q} Y_1 + \displaystyle\sum_{q<\alpha<pi+qj} b_{\alpha ij}\, t_1^{-\alpha} X_1^{i} Y_1^{j} \\ t_0 = t_1^{-1} + \displaystyle\sum_{2<\alpha<pi+qj} c_{\alpha ij}\, t_1^{-\alpha} X_1^{i} Y_1^{j} \end{cases}$$

と表示できることが general theory (cf. SGA1) よりわかっている。ここで $(i+j, \alpha)$ の存在領域をプロットすると、



左図のようになる。その格子点集合が $\alpha = \dfrac{i+j}{r}$ より上にあれば RD というわけである。

たとえば、非現実的な設定であるが、上の transition が、X_1, Y_1 についての多項式で書けているなら、RD なのである。(r を十分に大きくとればよい。) というところまで思いをはせた時、私は次のように考えた。

$\boxed{起}$ 一般に、$\mathbb{P}^1$ の近傍で、normal bundle が ample なものを記述するには、無限個(可算)のパラメータが必要である。

$\boxed{承}$ もし、$\mathbb{P}^1$ の近傍が、何らかの事情で、有限個の

パラメータで記述できたら、おそらくRDなのではないか？（根拠は薄弱だが、なんとなくそんな気がするのである）

$\boxed{\text{転}}$ ところが、有理曲面 S の近傍 (X, S) で、normal bundle が ample なものは、有限個のパラメータで記述される。

$\boxed{\text{結}}$ とすれば、その S 上にうまく $C \cong \mathbb{P}^1$ をとれば、C の近傍 $(\hat{X, C})$ は有限個のパラメータで記述されることになり、そうすると、RDなのではないか？

ここまでの、論理的裏付けを欠いた推論ののちに、私は、冒頭にあげた問題が肯定的に解決できることを確信した。もっとも、それから一年ほど経った現在、解決できているのは、S が toric な場合だけであるが－－－－。

§4. 鍵となる考察②

前節の終わりに述べた、曖昧模糊とした〈起承転結〉を、もう少しきちんと裏付けてみよう。

SGA1にある一般的理論によれば、smooth variety S と、その上の vector bundle N を与えたとき、

$$\left\{ \begin{array}{l} S \text{ の1次近傍 } S_1 \text{ で} \\ N_{S/S_1} \simeq N \text{ なるもの} \end{array} \right\} \Big/ \sim \quad \text{は、}$$

$H^1(S, \Theta_S \otimes N^\vee)$ － torsor である。特に、集合としては、

$H^1(S, \Theta_S \otimes N^\vee)$ と bijective である。また、$n \geqq 2$ に対して、$(n-1)$ 次近傍 S_{n-1} を 1 つ固定した時に、

$$\left\{ \begin{array}{l} S \text{ の } n \text{ 次近傍 } S_n \text{ で、} \\ S_{n-1} \text{ を含むもの} \end{array} \right\} \Big/ \sim \quad \text{は、} H^1(S, \mathcal{F}_n)\text{-torsor}$$

であるか、または空集合である。ここで、$\mathcal{F}_n = \Theta_{S_n|S} \otimes S^n(N^\vee)$.

obstruction は $H^2(S, \mathcal{F}_n)$ にある。ここで、2つの n 次近傍 S_n, S_n' $(\supset S_{n-1})$ が $S_n \sim S_n'$ であるとは、包含写像 $S_{n-1} \hookrightarrow S_n$ 及び $S_{n-1} \hookrightarrow S_n'$ と compatible であるような同型 $\varphi: S_n \longrightarrow S_n'$ が存在することである。

今、$\dim S \geqq 2$ で、N が ample line bundle なら、Serre duality と Serre vanishing によって、十分大きな n については $H^1(S, \Theta_{S_n|S} \otimes S^n(N^\vee)) = 0$ である。これは Gieseker ([G]) が指摘したことであるが、そうすると、S の近傍は、有限個のパラメータで記述できることになる。これが $\boxed{\text{転}}$ にあたる。

ところが、$\dim S = 1$ であると、

$\dim H^1(S, \Theta_{S_n|S} \otimes S^n(N^\vee)) \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty)$ となり、S の近傍の記述には、本質的に可算無限個のパラメータを必要とする。($\boxed{\text{起}}$)

ここに、1次元 subvariety と、2次元以上の subvariety との決定的な違いがある。高次元多様体上の curve は、小回りが

きくが、反面小回りが効きすぎて困るということにもなる。

さて、上記の general theory を、小平流に Čech cochains の言葉で解釈すると、おおよそ次のようになる。簡単のため、S は nonsingular toric surface, N は line bundle としよう。
$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ を S の affine open cover とし、(t_i, u_i) を U_i の座標とする。(X, S) を S の近傍とする。$X|_{U_i} \cong \mathrm{Spec}\, k[t_i, u_i][[x_i]]$ となっているとする。(S が nonsing. toric surface ならば、各 U_i は、$\mathbb{A}^2$ と同型であるようにとれる。) そして、transitions を、
$(t_i, u_i, x_i) = (f_{ij}(t_j, u_j, x_j), g_{ij}(t_j, u_j, x_j), h_{ij}(t_j, u_j, x_j))$
とかこう。$\Phi_{ij} = (f_{ij}, g_{ij}, h_{ij})$ とする。

今、f_{ij} 等を x_j について展開して、

$$f_{ij}(t_j, u_j, x_j) = f_{ij}|_0(t_j, u_j) + f_{ij}|_1(t_j, u_j, x_j) + \cdots + f_{ij}|_n(t_j, u_j, x_j) + \cdots$$

という記法を用いる。($f_{ij}|_n$ は x_j について n 次斉次)

S の U_i 内での方程式が $x_i=0$ であることに注意すれば、$h_{ij}|_0=0$ がわかる。今 S と N が与えられているので、$f_{ij}|_0$, $g_{ij}|_0$, $h_{ij}|_1$ は与えられているとしてよい。

1次近傍の表示を定めるには、data $(f_{ij}|_1, g_{ij}|_1)$ を定めればよいが、これを次の要領で、$C^1(\mathcal{U}, \Theta_S \otimes N^\vee)$ の元

とみなす。$(f_{ij|1}, g_{ij|1})$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\otimes f_{ij|1}(f_{ji|0}, g_{ji|0}, h_{ji|1})$$

$$+\frac{\partial}{\partial u_i}\otimes g_{ij|1}(f_{ji|0}, g_{ji|0}, h_{ji|1})$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_i}\otimes \widehat{f_{ij|1}}\cdot X_i + \frac{\partial}{\partial u_i}\otimes \widehat{g_{ij|1}}\cdot X_i \in \Gamma(U_{ij}, \Theta_S\otimes N^\vee)$$

を対応させるのである。ここで $\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial u_i}$ は、Θ_S の U_i 上の base であり、$X_i \bmod X_i^2$ は $N^\vee$ の base である。上式では $\bmod X_i^2$ は省略してある。$f_{ij|1}$ は、t_j, u_j, X_j についての関数で、X_j について1次斉次であるが、それに $f_{ji|0}$ 等を代入することにより t_i, u_i, X_i についての関数を得、X_i について1次斉次なので、X_i でくくるという意味である。そうすると、$\Theta_S\otimes N^\vee$ の base $\frac{\partial}{\partial t_i}\otimes X_i$, $\frac{\partial}{\partial u_i}\otimes X_i$ があらわれ、その表示によって $\Theta_S\otimes N^\vee$ の section と思うのである。

$(n-1)$ 次近傍が定まっている時、n 次近傍を与えるには、collection $(f_{ij|n}, g_{ij|n}, h_{ij|n})$ を与えればよいが $(n\geq 2)$、今度は、これを

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\otimes f_{ij|n}(f_{ji|0}, g_{ji|0}, h_{ji|1})$$

$$+\frac{\partial}{\partial u_i}\otimes g_{ij|n}(f_{ji|0}, \cdots) + \frac{\partial}{\partial X_i}\otimes h_{ij|n}(f_{ji|0}, \cdots)$$

と思うことによって、$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_n)$ の元と思うのである。

今度は $\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial X_i}$ は $\Theta_{X|S}$ のbaseである。$f_{ij|n}$ 等を t_i, u_i, X_i の関数に直すと X_i^n がくくり出され、これを N^{-n} のbaseと思うのである。($\mathcal{F}_n = \Theta_{X|S} \otimes N^{-n}$)

1次近傍を $\lambda_1 = (f_{ij|1}, g_{ij|1}) \in C^1(\mathfrak{U}, \Theta_S \otimes N^{\vee})$ によって定めると、X について2次の項においては貼り合わず、ずれを生ずる。つまり

$$\left(\Phi_{ij}(\Phi_{jk}) - \Phi_{ik}\right)_{[2次]} = \mu_{ijk} \quad \text{とおく。}$$

(μ_{ijk}) は $C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_2)$ の元と思える。(さらに $Z^2(\mathcal{F}_2)$ に入る)

SGA1のgeneral theoryは、次のように解釈される。

1). $\lambda_1 \in C^1(\mathfrak{U}, \Theta_S \otimes N^{\vee})$ の定める表示が、1次の項まで貼りあって1次近傍を定める

$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 \in Z^1(\mathfrak{U}, \Theta_S \otimes N^{\vee})$.

2). $\lambda_1' \in B^1(\mathfrak{U}, \Theta_S \otimes N^{\vee})$ ならば、

$(\lambda_1$ の定める1次近傍$) \simeq (\lambda_1 + \lambda_1'$ の定める1次近傍$)$

3). λ_1 は、2次の項にずれ $\mu_2 \in Z^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_2)$ を生ずる。transitionに2次の項 λ_2 をつけ加えて、2次の項まで貼りあわせるには、$d\lambda_2 = -\mu_2$ であることが必要十分。したがって、$\mu_2 \notin B^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_2)$ ならばobstructedとなる。

4). 上記の $\lambda_2 \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_2)$ (一般に cocycle でないことに注意する)のとり方は、up to $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_2)$ だけあるが、

$\lambda_2' \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_2)$ のとき,

$$\left[\begin{array}{l}(\lambda_1, \lambda_2)\text{の定める}\\ 2\text{次近傍}\end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{l}(\lambda_1, \lambda_2+\lambda_2')\text{の}\\ \text{定める}2\text{次近傍}\end{array}\right].$$

5). $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$ が $(n-1)$ 次近傍を定めているとき, n 次の項において、ずれ $\mu_n \in Z^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}_n)$ を生ずる。

$\mu_n \in B^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}_n)$ のとき, $\lambda_n \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_n)$ を,

$d\lambda_n = -\mu_n$ ととると, $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ が、n 次の項まで貼り合って n 次近傍を定める。

6). $\lambda_n' \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_n)$ のとき,

$$\left[\begin{array}{l}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)\text{の}\\ \text{定める}\,n\text{次近傍}\end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{l}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n+\lambda_n')\text{の}\\ \text{定める}\,n\text{次近傍}\end{array}\right]$$

λ_1 は cocycle condition をみたすが、一般に, $\lambda_2, \lambda_3, \cdots$ はもはや cocycle ではない。たとえ $H^1(\mathcal{F}_n) = 0 \quad n \gg 0$ であったとしても, $\mu_2, \mu_3, \cdots$ が連鎖的に生ずるため、transition を書くには、無限の項を必要とする。それは、非線型な現象を線型な考察の積み重ねによってとらえようとする未定係数法の宿命であるといえよう。

S が nonsingular toric surface の時, scope という概念を

導入して、その困難をクリアする。それは、次のように考える。

今、f_{ij10}, g_{ij10}, h_{ij11} はすべて単項式であるとする。ここに toric という仮定が効く。

$$f_{ij10} = t_j^{a(i,j)} u_j^{b(i,j)}$$

$$g_{ij10} = t_j^{c(i,j)} u_j^{d(i,j)}$$

$$h_{ij11} = t_j^{e(i,j)} u_j^{f(i,j)} X_j$$ とする。ここで

$$B(i,j) = \begin{pmatrix} a(i,j) & b(i,j) & 0 \\ c(i,j) & d(i,j) & 0 \\ e(i,j) & f(i,j) & 1 \end{pmatrix}$$ とおくと、

たとえば、$B(i,j)B(j,k) = B(i,k)$ であったり、

$$t_i^{A_i} u_i^{B_i} X_i^{N_i} \equiv t_j^{A_j} u_j^{B_j} X_j^{N_j} \pmod{(X_j^2)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (A_i, B_i, N_i)\cdot B(i,j) = (A_j, B_j, N_j)$$

であったりと、便利である。

$\{\Phi_{ij}\}$ が、toric surface の近傍の表示を与えているとき、その表示の、座標 (t_0, u_0, X_0) に関する scope $\mathcal{S}_0$ を、次のように定義する。

● scope は、$M \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の部分半群で、その生成元は、次の通り。（ここで、M は toric surface S の、characters のなす自由加群である。）

i, j が index set I 内を走る時、

ア). f_{ij} の中に $t_j^{\alpha} u_j^{\beta} X_j^{n}$ が現れていれば、そのような、
α, β, n すべてについて、

$$(\alpha - a(i,j),\ \beta - b(i,j),\ n) \cdot B(j,0)$$

イ). g_{ij} の中に $t_j^{\alpha} u_j^{\beta} X_j^{n}$ が現れていれば、そのような
α, β, n すべてについて

$$(\alpha - c(i,j),\ \beta - d(i,j),\ n) \cdot B(j,0)$$

ウ). h_{ij} の中に $t_j^{\alpha} u_j^{\beta} X_j^{n}$ が現れていれば、そのような
α, β, n すべてについて

$$(\alpha - e(i,j),\ \beta - f(i,j),\ n-1) \cdot B(j,0)$$

これらすべて、(i, j も動かして) で生成される半群が
$\mathcal{S}_0$ である。

座標 (t_i, u_i, X_i) に関する scope $\mathcal{S}_i$ も同様に定義され、 $\mathcal{S}_j = \mathcal{S}_i \cdot B(i,j) = \{(\alpha, \beta, n) \cdot B(i,j) \mid (\alpha, \beta, n) \in \mathcal{S}_i\}$
が成立している。

(α, β, n) そのものを考えずに、$(\alpha - a(i,j), \cdots)$ 等を
考えることには理由がある。これはちょうど、transition
$\{\Phi_{ij}\}$ の top term をくくり出す作業に対応しているのだが、
toric variety S に対して、$\Theta_S^1(-\log D)$ が <u>trivial</u>
な locally free sheaf であることが (あとで) 効いてくるのである。
ここで D は S から その open orbit を除いた因子
である。

さて、くわしくは述べないが、$\mathcal{F}_n = \Theta_X|_S \otimes N^{-n}$,
$\mathcal{G}_n = \Theta_S \otimes N^{-n}$, $\mathcal{H}_n = N \otimes N^{-n}$ とおくとき、

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_n \longrightarrow \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n \longrightarrow 0$$

なる完全系列があるわけだが、$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_n)$, $C^p(\mathcal{G}_n)$, $C^p(\mathcal{H}_n)$ の元ないし部分集合に対してもscopeを定義する。(上記のscopeとcompatibleになるように自然に導入できる)

次の定理を、scopeの基本定理、と呼びたい。(証明はやさしい)

<u>定理.</u>　S を nonsingular (projective) toric surface とし、N を S 上の line bundle とする。
$n \geqq 1$ に対して、vector subspaces $V_n \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}_n)$ であって $\pi_n(V_n) = H^1(\mathcal{G}_n)$ となるものを決めておく。
ここで、$\pi_n : Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}_n) \to H^1(\mathcal{G}_n)$ は標準的射影。
また、$n \geqq 2$ に対して、vector subspaces $W_n \subset Z^1(\mathcal{H}_n)$ であって、$\pi_n'(W_n) = H^1(\mathcal{H}_n)$ となるものを決めておく。
ここに、$\pi_n' : Z^1(\mathcal{H}_n) \longrightarrow H^1(\mathcal{H}_n)$ は標準的射影。

$$\mathcal{S} = \mathrm{scope}(V_1) + \mathrm{scope}(V_2) + \cdots + \mathrm{scope}(W_2) + \mathrm{scope}(W_3) + \cdots$$

とおく。(scope(V_i)等は、言うまでもなく、V_i の(等) scope という

意味である。)

このとき，Sの任意の形式的近傍 (X, S) で，$N_{S/X} \simeq N$ なるものは，そのAcone が $\mathcal{S}$ に含まれるような表示を持つ。

この定理の中に $\mathfrak{F}_n$ が現れていないことに注意していただこう。ということは、つまり、この定理によって，問題を，曲面S上の層のČech cohomologyの議論に帰着し得たわけである。

系．Nがampleならば、$\mathcal{S}$は有限生成

$(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$ が $(n-1)$次近傍を定めているとき，n次の項のずれ μ_n がでてきてしまうところの困難は，実はAconeを，Acone$(\mu_n) \subset$ Acone$(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$ が成立するように定義したことによって回避された。無限個の項をもつ巾級数の複雑な様相を，Aconeという半群の檻の中に閉じこめたのである。さて§3で述べた補題は、線型不等式である。この補題をうまく適用させることは、レーザービームでエイリアンを迎撃するようなもので、敵の遠近は問題でない。レーダーのスコープにうつった影だけをたよりにすればよいわけである。

§5. 終わりに

といっても、これで終わらない。technicalな問題としては、これからが本番といったところで、結構面白い、と私は思うのだが、（Sの Picard数の帰納法に持ちこむ。そのために scopeについてもう少し深く考察する。最後は、toric surfaceに対応する weighted dual graph上での numericalなゲームが展開される。Nが ampleであることが、よく効いていることが見てとれる）、長いので、とても残りの紙面には書ききれない。

unirationalityの問題を考えはじめて4年余になる。最初の2年は、手も足も出なかったが、2年ほど前に、F.Campana氏と加藤昌英氏の論文に触発されて、$\mathbb{P}^1$の近傍を考察する手段を思いついた。両氏に深く感謝申し上げたい。最初は、rational surface上の conic bundleがいつ unirationalかという問題を考えたが、これは、この手段を用いてなおむずかしい。globalな条件を、うまく近傍の性質に反映させる技術の開発が必要なようである。

unirationalityはむずかしい問題だが、だからといって、光明が見えないわけではない。

参考文献

[B1] Bădescu, L. On ample divisors, Nagoya Math. J. 86 (1982), 155–171.

[B2] Bădescu, L, Hyperplane sections and deformations, in Springer Lecture Notes Math. 1056.

[C] Campana, F. Sur les compactifications d'un ouvert contenant un cycle quasi-ample, preprint.

[CG] Clemens, C. and Griffiths, Ph, The intermediate Jacobian of the cubic threefold, Ann. of Math. 95 (1972) 281–356.

[E] Ebihara, M. 題未定. 準備中.

[G] Gieseker, D. On two theorems of Griffiths about embeddings with ample normal bundle, Amer. J. Math. 99 (1977), 1137–1150.

[H] Hartshorne, R. Ample subvarieties of algebraic varieties, Springer Lecture Notes Math. 156.

[HM] Hironaka, H. and Matsumura, H. Formal functions and formal embeddings, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 52–82.

[K] Kato, Ma. On compact complex 3-folds with lines, Japan J. Math. 11 (1985), 1–58.

[SGA 1] Revêtements étales et groupe fondamental, Springer Lecture Notes Math 224.